Verkehrsfluss und Geschwindigkeit (Teil 1)

Eine Unterrichtsreihe für den Physik-Unterricht der 11. Jgst., geeignet für den Kontext "Der Straßenverkehr",
oder für den Mathematik-Unterricht zur Extremwertproblematik

(A1, A2,... sind Arbeitsaufträge an die Schülerinnen und Schüler)

Soll eine Stadtstraße viel Autoverkehr bewältigen, so meint man gemeinhin dies zu erreichen, wenn die zulässige Höchstgeschwindigkeit möglichst hoch gewählt wird. Am Beispiel verdeutlicht: wenn die Autos 60 km/h fahren, fahren über diese Straßen pro Stunde doppelt soviele Autos wie mit 30 km/h, (dabei wird eine gleichmäßig fahrende Kolonne unterstellt).
Das träfe tatsächlich zu, wenn die Fahrzeuge immer den gleichen Abstand hätten. Denn die Stromstärke des Verkehrsflusses, gemessen in PKW / h, steigt dann proportional zur Geschwindigkeit an. In Wirklichkeit aber ist der Abstand der Fahrzeuge (Sicherheitsabstand) von der Geschwindigkeit abhängig. Das macht die Situation unübersichtlich und schwierig. Trotzdem wollen wir uns die Frage stellen, bei welcher Geschwindigkeit eine Straße wohl das größte Schluckvermögen, also die höchste Stromstärke aufweist und versuchen, diese Frage am Ende mit Hilfe mathematischer Verfahren zu beantworten ?

A1: Machen Sie einen Vorschlag für die Geschwindigkeit, bei der die PKW-Stromstärke maximal wird. Begründen Sie diesen, und diskutieren Sie dann die Gründe in einer kleinen Gruppe!

Wie kann man sich nun dem Problems weiter annähern?

Weil der Abstand der Fahrzeuge sicher eine wichtige Größe ist, wollen wir uns damit zuerst befassen.
(Danach betrachten wir dann eine ganze Fahrzeugkolonne, die z.B. an einem markanten Punkt wie einer Zählstelle vorbeifährt um dabei dann ihre Geschwindigkeit variieren zu lassen.)

Wie groß muss der Sicherheitsabstand zweier Fahrzeuge sein, damit es nicht zu einem Aufprall kommt ? Um ganz sicher zu gehen, wollen wir zuerst den Fall betrachten, dass ein vor uns fahrendes Fahrzeug plötzlich zu einem stehenden Hindernis würde, vor dem wir zum Halten kommen müssten. (Im allgemeinen kann dann der Abstand etwas kleiner sein, weil das vor uns fahrende Fahrzeug ja auch einen Anhalteweg hat und nicht plötzlich stehen bleibt. Siehe dazu Teil 2 weiter unten). Aber natürlich gibt es plötzlich auftauchende Hindernisse und um ganz sicher zu gehen, dass wir den ungünstigsten Fall zugrunde gelegt haben, wollen wir diesen betrachten.

A2. Entwickeln Sie eine Formel für den Sicherheitsabstand, indem Sie den Reaktionsweg und den Bremsweg darstellen!
(Vorschläge für Formelzeichen: Alle Fahrzeug fahren mit der gleichen Geschwindigkeit: v; Reaktionszeit: t_R ; Bremszeit: t_B; Anhaltezeit: t_A; Reaktionsweg: s_R; Bremsweg: s_B; Anhalteweg: s_A; Bremsverzögerung: a; Fahrzeuglänge: L)
(Vergleichen Sie mit der Lösung am Ende dieses Abschnitts!)

A3. Wie viele PKW durchlaufen nun pro Sekunde die o.g. Zählstelle ? Diskutieren Sie dieses Problem zuerst 15 Minuten in Ihrer Gruppe!
Danach steht Ihnen folgende Anleitung zur Verfügung:
Wir nennen t* die Zeit von einem PKW bis zum nächsten (Zeitlücke). Diese ist so etwas wie ein Periodendauer. Die Strecke die sich immer wiederholt, ist s_A + L. Dies geschieht mit der Geschwindigkeit v. Somit ergibt sich die Zeitlück zu

$t^* = (s_A + L) / v$. Der Kehrwert dieser Zeitlücke ist die Durchflussmenge d(v) pro Sekunde (Stromstärke) in 1/s.

A4. Machen Sie sich diese zuerst an einem Beispiel klar!

A5. Stellen Sie nun die Formel für d(v) auf!

Um die maximale Durchflussmenge zu bestimmen, müssen wir ein Extremwertproblem lösen.

A6. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit für die maximale Durchflussmenge!
(Nehmen Sie dazu als Bremsverzögerung $a = 7\ m / s^2$)

A7. Bestimmen Sie nun diese Durchflussmenge selbst!

Lösungen:
A2: $s_A = v \cdot t_R + 0{,}5 \cdot v^2 / a$
A5: $d(v) = v / (s_A + L)$
A6: $v^2 = 2 \cdot L \cdot a$ (Mit L= 4,5m ergibt sich v = 7, 94 m/s = 28,57 km/h)

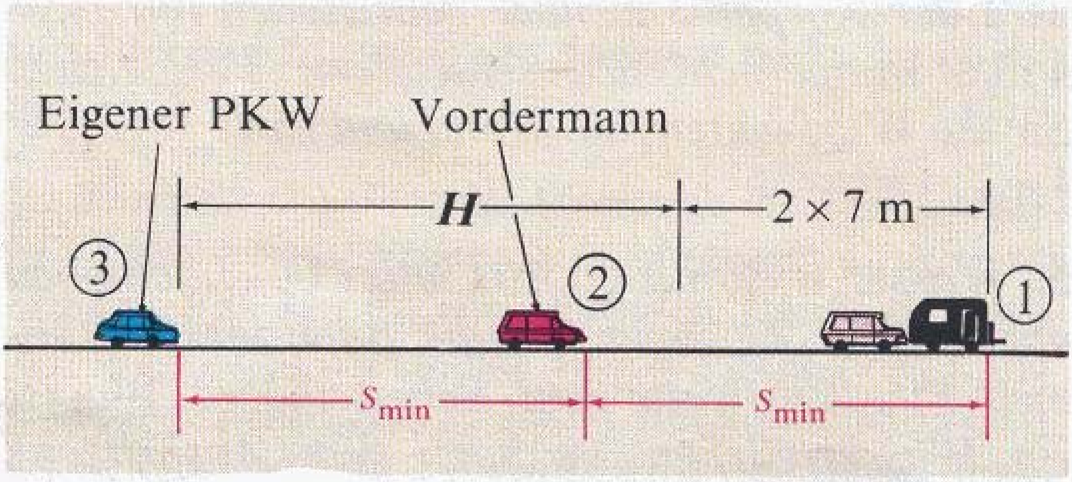
Damit erhalten wir die unerwartete Lösung, dass bei v = 28,57 km/h mehr Autos durch den Straßenquerschnitt fahren als bei jeder anderen Geschwindigkeit.

Verkehrsfluss und Geschwindigkeit (Teil 2)

Im zweiten Teil dieser Darstellung wird das Abstandsproblem anders bearbeitet (nach Dorn Bader: Physik Oberstufe MS)

Es gehört zur allgemeinen Erfahrung, dass man bei einem 2-Sekunden-Abstand relativ sicher fahren kann. Diese Zeitlücke
t * = 2 s kann auch leicht abgeschätzt werden. Wenn das vorausfahrende Auto eine markante Stelle überfährt, so zähle man langsam "21, 22"; dann erst sollte man diese Stelle erreichen. Warum wird dieser 2-Sekunden Abstand empfohlen?
Nach § 4 der Straßenverkehrsordnung muss der Mindestabstand s_{min} vom vorausfahrenden Auto so groß sein, dass man dann noch hinter ihm sicher halten kann, wenn es plötzlich bremst (mit einem plötzlich stehenden Hindernis braucht man dagegen im allgemeinen nicht zu rechnen). Man kann also nach Bild 62.2 in den eigenen Halteweg H den Mindestabstand s_{min} des Vordermanns

einbeziehen, vermindert um 2·7 m, nämlich den mittleren Platzbedarf von 2 PKW bei Kolonnenstau. So vermeidet man eine Massenkarambolage, selbst wenn Fahrer 2 auf den stehenden Anhänger 1 auffahren sollte.



62.2 Fahrer 3 bezieht zu seinem Halteweg *H* noch einen Teil von s_{min} seines Vordermanns mit ein.

Für den Halteweg H schätzt man ab :

$H = 2\,s_{min} - 2 \cdot 7$ m oder $s_{min} = H / 2 + 7$ m.

Bei der Bremsverzögerung $a = 5$ m/s² ist der Halteweg $H = S + v_o \cdot 1\,s = v_o^2 / (10\,ms^{-2}) + v_o \cdot 1s$. Dies gibt

$s_{min} = v_o^2 / (20\,ms^{-2}) + v_o \cdot 0{,}5s + 7m$. (63.1)

Diesen Mindestabstand s_{min} zeigt Bild 63.2a; er wird von v_o^2 geprägt, steigt also mit v_o schnell an.

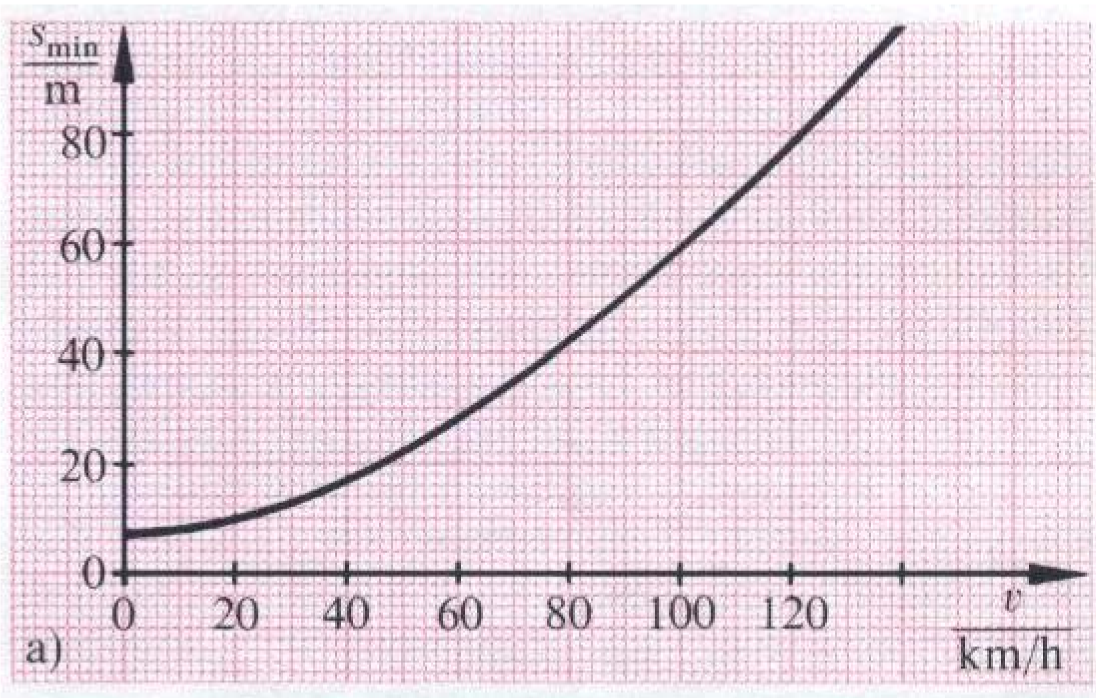
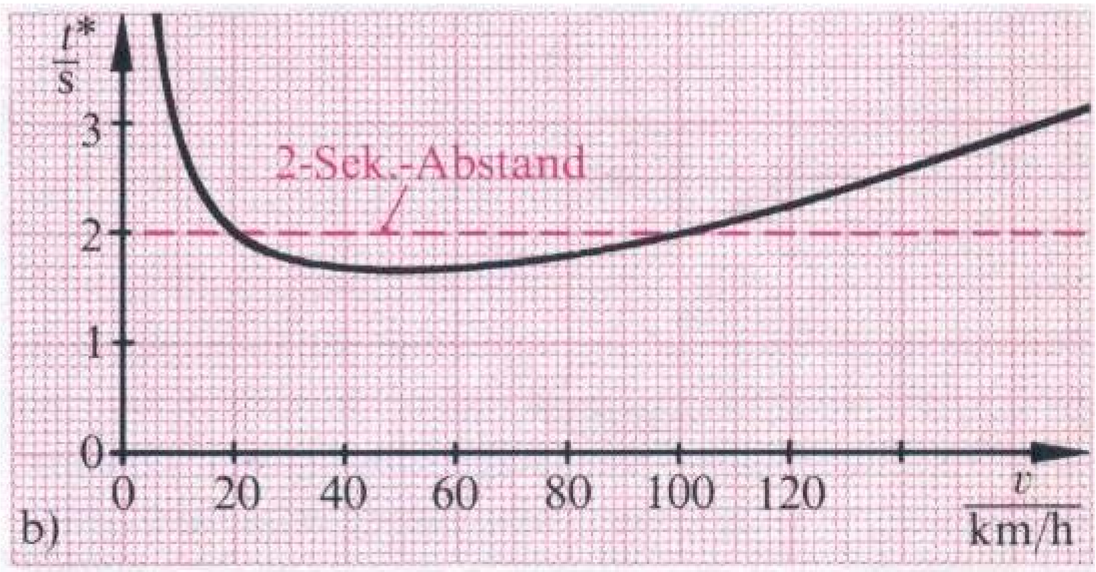


Bild 63.2a

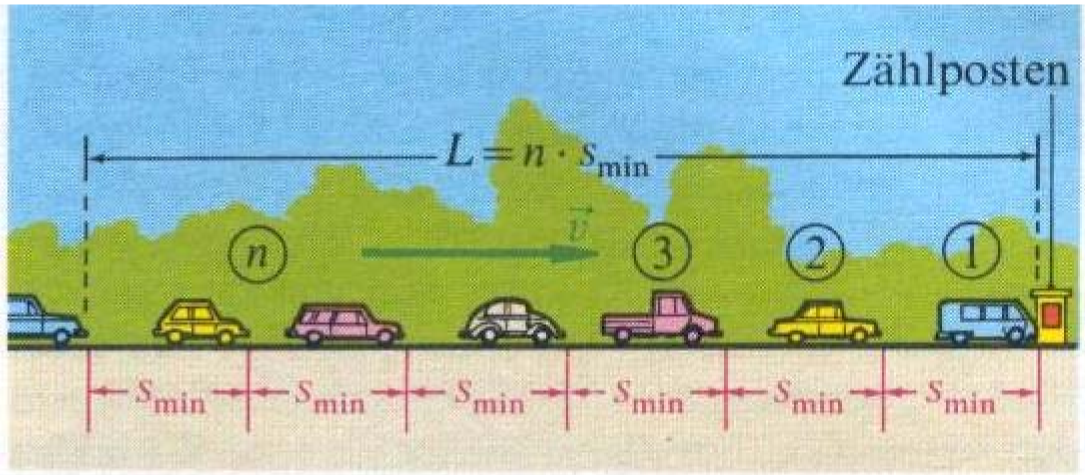
Zum ungebremsten Durchfahren dieses Mindestabstands s_{min} mit der Geschwindigkeit v_o braucht

man die Zeitlücke
$t^* = s_{min} / v_0$. Diese Zeitlücke t* hat nach Bild 63.2b ein sehr flaches Minimum, das etwas unterhalb des empfohlenen
2 s-Abstands liegt. Doch sollte dieser sowohl bei langsamer Kolonnenfahrt (unter 30 km/h) wie auch bei schneller Fahrt
deutlich überschritten werden. Nach der Rechtsprechung sollte die Zeitlücke t* den Wert 1,5 s nicht unterschreiten.



Drosselt ein Tempolimit den Verkehrsfluss ?

Wieviele Autos kann eine Fahrbahn in 1 h maximal befördern, genauer, wieviele passieren je h einen Zählposten ?
Wir denken an die elektrische Stromstärke I. Sie wird durch die Ladung Q gemessen, die in 1s seinen Leiterquerschnitt
durchfließt. Es gilt I = Q / t. Ist z.B. die Zeitlücke t* = 2 s, so fahren in 1 h = 3600 s an einem Zählposten 1800 Autos
vorbei; die Verkehrsstromstärke beträgt I = 1800 PKW / h. Sie ist also der Kehrwert $I = 1 / t^* = v_0 / s_{min}$ der Zeitlücke t*.
Dies folgt auch aus Bild 63.1.

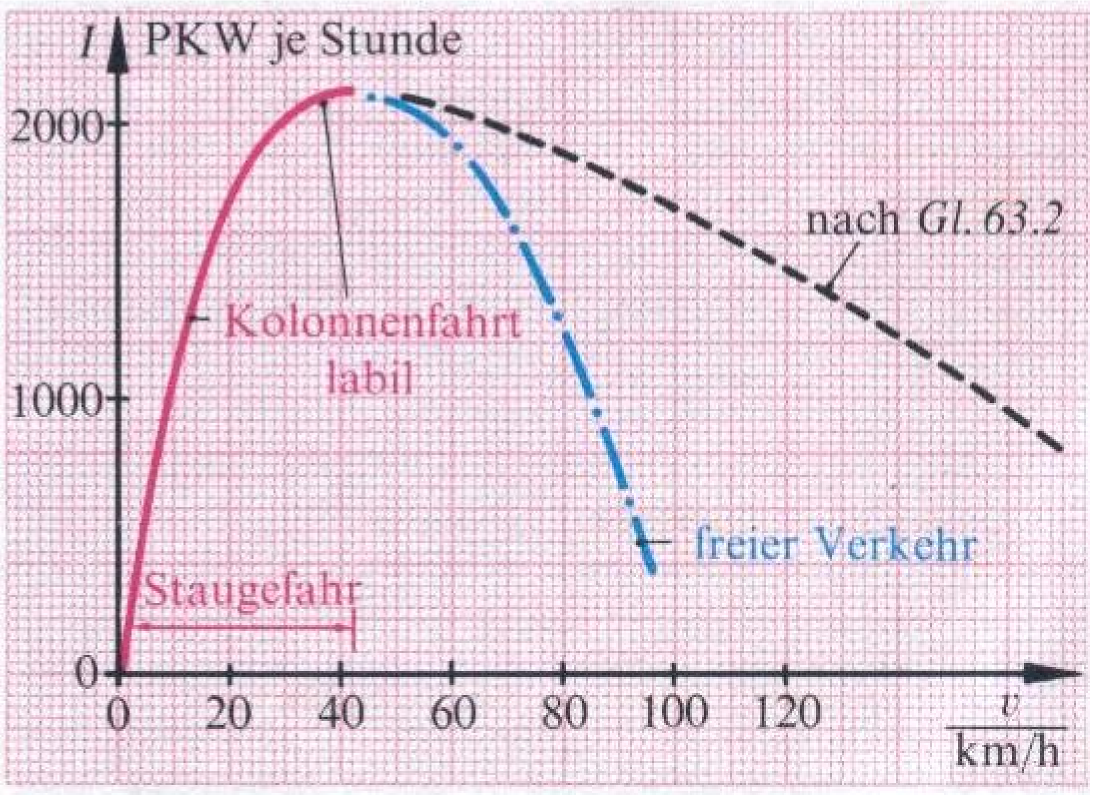


63.1 *n* PKW bilden mit Abstand s_{min} eine Kolonne der Länge $L = n\, s_{min}$.

Dort fahren n PKW mit Abstand s_{min} und bilden eine Kolonne der Länge $L = n\, s_{min}$. Sie fährt mit der Geschwindigkeit v in der Zeit t = L / v am Zählposten vorbei. Dieser registriert die Stromstärke

$I = n / t = (L / s_{min}) / (L / v)$

Man erwartet, dass diese Verkehrsstromstärke I, d.h. die Zahl der PKW, welche die Straße in 1 h "abführt", mit der Geschwindigkeit v steigt - analog zum elektrischen Strom: Die Stromstärke I ist ja der Elektronengeschwindigkeit v proportional. Dabei bleibt jedoch der Elektronenabstand konstant. Der PKW-Abstand s_{min} steigt aber nach Bild 63.2a schneller als v. Also zeigt die Stromstärke ein Maximum. Es liegt nach Bild 63.3 bei 40 km/h.



Dort hat ihr Kehrwert t* = 1 / I sein Minimum. Links vom Maximum des I (v) - Diagramms ist die Verkehrsstromstärke kleiner, weil die Autos - wegen zu großer Verkehrsdichte - in Kolonne langsam fahren müssen. Rechts von diesem Maximum, also bei schnellem Verkehr, wachsen die Abstände aufeinanderfolgender Autos viel schneller als v an, so dass die Verkehrsstromstärke anders als vielleicht erwartet, wieder absinkt.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit für die maximale Durchflussmenge!
(Wenn Sie beide Ergebnisse vergleichen wollen, sollten Sie in Teil 1 noch einmal mit $a = 5\ m/s^2$ rechnen !)

Bestimmen Sie nun diese Durchflussmenge selbst!